JEMI .I-GUESMI.M	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	4éme SC-EXP
LYCEES :02/03/1934-I.K.SILIANA		DUREE :2H

Exercice 1 : (7pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.On considère les points $(0;0;2)$, $B(1;0;0)$ et $C(0;-1;0)$ et $I(1;1;1)$

1)a)Montrer que les points A ;B et C déterminent un plan (P)

b)Montrer qu'une équation de P est :-2x+2y-z+2=0

c)Calculer $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AI}$? En déduire que $I \notin P$

d)Calculer le volume de tétraèdre IABC , déduire alors la distance du point I au plan P

2)soit S l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant :$x^2+y^2+z^2-4y-5=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et son rayon

b)Etudier la position relative de S et P et caractériser leur intersection

3)Pour tout réel m ,on associe le planP_m: $2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$

a)Déterminer m pour que P_m soit tangent à S

b) Pour cette valeur de m déterminer les coordonnées de leur point de tangence H

Exercice 2: (6pts)

Soit f la fonction définie sur$\left]0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{\sin(\pi x)}$

1)a)Montrer que f est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ et que $f'(x)=\frac{-\pi\cos(\pi x)}{(\sin(\pi x))^2}$

b)Montrer que f est bijective de $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ sur $[\mathbf{1};+\infty[$

2)On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f

a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1

b) Montrer que f^{-1} dérivable sur $]1;+\infty[$ et que $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\pi x\sqrt{x^2-1}}$

4)Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=4cm$

Exercice 3: (7pts)

A) Le graphique ci-dessous (Voir Annexe) est la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $]1;2]$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. . La droite d'équation :x=1 est une asymptote à C

1) Par une lecture graphique :

a) Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 et donner $lim \frac{f(x)}{x-2}$

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1;2]$ sur un intervalle J que l'on précisera

c) Construire la courbe C ' de f^{-1} dans le même repère$(O;\vec{i};\vec{j})$. (voir annexe)

d) Montrer que f^{-1}est dérivable à droite en 0 et déterminer $(f^{-1})'_d(0)$

2) On admet que :$f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans$]1;2]$. Vérifier que : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

b) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3)Soit la suite (u_n)définie$\mathbb{N}$ sur par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

a)Construire les quatre premiers termes se la suite (u_n)sur l'axe des abscisses du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq 2$

c) Calculer $(f^{-1})'(x)$ *pour tout* $x \in [0;+\infty[$, puis montrer que pour que pour tout $x \in [1;2]$, $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$

e)Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

f) Montrer alors que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on précisera

Bon travail